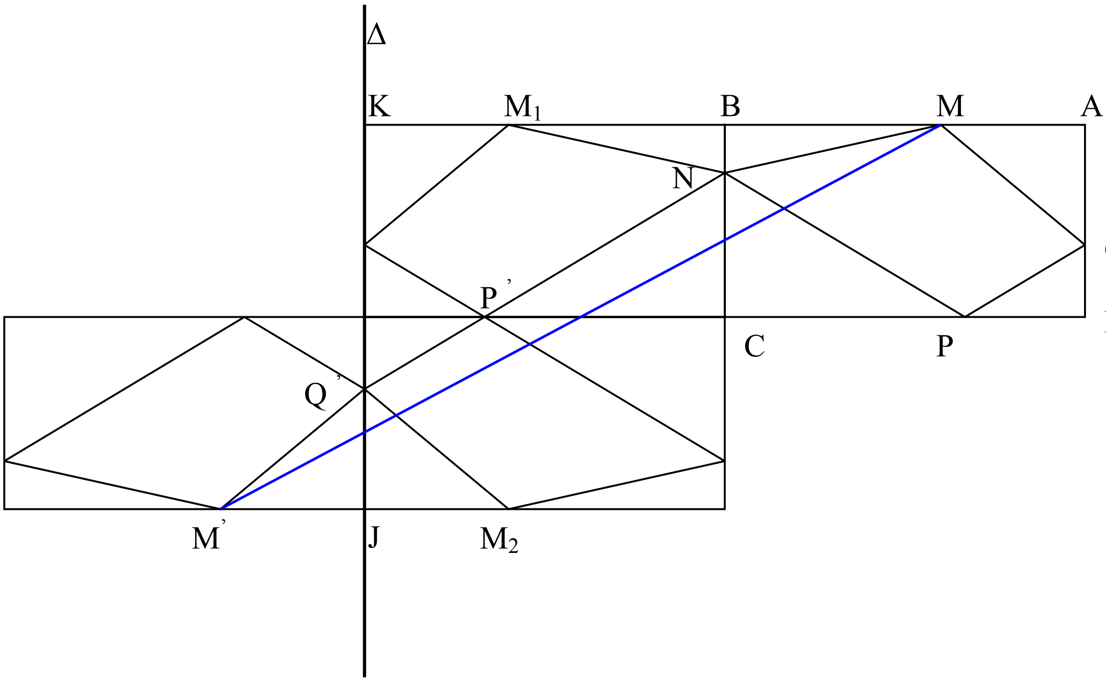
Quadrilatères inscrits dans un triangle

Soit ABCD un rectangle. On note $(\Delta) = \sigma_{(BC)}(AD)$

1) Construction

On construit $M' = \sigma_{(\Delta)} \circ \sigma_{(CD)} \circ \sigma_{(BC)}(M)$



M_1 est le symétrique de M par rapport à BC, M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à CD et M' est le symétrique de M_2 par rapport à Δ.

Evaluons le vecteur $\overrightarrow{MM'}$
Soit J l'intersection de Δ et de M_2M' et K celle de AB avec Δ

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M'}$$

Comme M_1 est le symétrique de M par rapport à BC

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{M_2J}$$

Or M_2J est égal à M_1K qui est lui même égal à AM

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{BC} + 2\,(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = 2\,\overrightarrow{AC}$$

2) Montrons que le périmètre du quadrilatère MNPQ est supérieur à 2 AC

Le périmètre de MNPQ est égal à MN + NP + PQ + QM

Or les trois quadrilatères obtenus par symétrie successives sont des figures isométriques et l'on a donc

NP = NP', PQ = P'Q' et QM = Q'M'

On en déduit que le périmètre de MNPQ est égal à MN + NP' + P'Q' + Q'M'. C'est donc la longueur de la ligne brisée correspondante qui est inférieure à celle du segment MM' qui comme on l'a vu à la question précédente vaux 2AC.

3) Quadrilatère MNPQ de périmètre minimal.

Le périmètre du quadrilatère MNPQ est minimal si et seulement si chacun des segments MN, NP', P'Q' et Q'M' sont sur la droite MM’, c’est à dire sont parallèles à MM’.

Il faut donc que MN et Q’M’ soient parallèle à AC, c’est à dire que MN et QM soient parallèle à AC. Il faut donc aussi que P'Q' et Q'M' soient parallèles à AC, ce qui est équivalent à PQ et QM parallèles à BD. Ces conditions sont suffisantes, puisque dans ce cas le périmètre vaut toujours 2AC. La condition nécessaire et suffisante peut s’exprimer en disant que MNPQ est un parallélogramme. Pour tout point M sur AB, il existe donc un parallélogramme ayant M comme sommet. Le choix de M étant quelconque sur le segment ouvert AB, il existe une infinité de solution.

4) Quadrilatère de surface minimale .

La surface du parallélogramme est égale à la surface du rectangle ABCD diminué de la surface des 4 triangles AMP, MBN, NCQ,PQD.

Soit L la longueur et l la largeur du rectangle et x la longueur AM

Aire du rectangle ABCD : L l

Aire du triangle AMP : $\frac{1}{2}$ x * (l/L)x = $\frac{1}{2}$ lx^2/L

Aire du triangle MBN : $\frac{1}{2}$ * (l/L) * $(L-x)^2$

Aire du parallélogramme : Ll –(l/L)* (x^2 + $(L-x)^2$) = l/L * (2 L x - 2 x^2)

Cette aire est minimale pour 4x = 2L soit x = L/2. Il s’agit du cas du losange pour lequel l’aire vaut : l/L * (L^2 - L^2/2) = lL/2

Dernière mise à jour : 29/05/2003

Retour Contrôle